I) Intégrabilité et conséquences

Exercice 1: ★ *b.02.001*

Etudier l'intégrabilité des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{\ln x}{(1+x)(2+x)}$ sur $]0\,,+\infty[$.
2. $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}}$ sur $]1\,,+\infty[$.
3. $x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$ sur $\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right[$.
4. $x \mapsto \dfrac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^{\frac{5}{2}}}$ sur $]0\,,1[$.
5. $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\ln x}$ sur $]a\,,+\infty[$.
6. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)-\ln(1-e^{-x})}{x}e^{-\alpha x}$ sur $]0\,,+\infty[$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
7. $x \mapsto \cos(x^2+ax+b)$ sur $[0\,,+\infty[$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2: ★ *b.02.002*

On définit $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x^\beta)}$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$.

1. Trouver les conditions sur (α,β) pour que I_1 soit bien définie.
2. Même question avec I_2.
3. Tracer dans un repère (α en abscisses et β en ordonnées) les couples (α,β) qui rendent I_1 et I_2 définies.

Exercice 3: ★ *b.02.003*

Existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4: ★ *d.23.001*

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{2t+1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$.
2. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^t}{e^{3t}+1}\,\mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+\sqrt{t}}$.

Exercice 5: ★ *d.23.002*

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{\infty} (t-1)\sin\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$.

2. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t+1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.
4. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t$.
5. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{t+1}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6: ★ *d.23.005*

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t$.
2. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$.
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$.

Exercice 7: ★ *d.23.007*

Etudier l'existence des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}\,\mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t-1}$.
4. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t$.
5. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t\,\mathrm{Arctan}(t)}\,\mathrm{d}t$.
6. $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(t+2-\sqrt{t^2+4t+1}\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 8: ★ *d.23.008*

Etudier l'existence de $\displaystyle\int_0^{\infty} \ln(\operatorname{th} t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9: ★ *d.23.009*

1. Etudier l'intégrabilité de $]1\,,+\infty[$ de

$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$$

2. Montrer

$$\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln 3}{2}$$

Exercice 10: ★ *d.23.021*

Soit $a \in \mathbb{R}$. Etudier la nature de

$$\int_0^\infty \frac{t^a}{1+t^{3a}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 11: ★ *d.23.022*

Déterminer en fonction du réel x la nature de

$$\int_0^1 \frac{t^x-1}{t-1}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 12: ★ *d.23.031*

Soit $f\;:\;[0\,,+\infty[\;\longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.
On suppose que f est intégrable sur $[0\,,+\infty[$. Montrer

$$\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Exercice 13: ★ *d.23.035*

Soit $f\;:\;[0\,,+\infty[\;\longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f et f' sont intégrables sur $[0\,,+\infty[$.
Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 14: ★ *d.23.127*

Justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^\infty \sin(e^t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 15: ★ *d.23.157*

Déterminer un équivalent simple de :

1. $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{e^t - 1}$ quand $x \to 0^+$.
2. $\displaystyle\int_x^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^3 + 1}$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 16: ★★ *b.02.009*

1. Montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^\infty e^{it^2}\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_x^\infty e^{it^2} \underset{x\to\infty}{=} \frac{ie^{ix^2}}{2x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Exercice 17: ★★ *b.02.011*

Exercice important.

1. Soit $f :]0\,,1] \to \mathbb{R}^+$ décroissante et intégrable.
   Etudier la limite éventuelle de $x \mapsto xf(x)$ quand $x \to 0^+$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ décroissante et intégrable.
   Etudier la limite éventuelle de $x \mapsto xf(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 18: ★★ *b.02.018*

Exercice important.
On note $E = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), f^2 \text{ et } f''^2 \text{ sont } \mathbb{R}_+\text{-intégrables}\}$. Soit $f \in E$.

1. Montrer que ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. En déduire que f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)f'(x) = 0$.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (f(x))^2 = 0$ et que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (f'(x))^2 = 0$.
4. Dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et telle que f^2 et f''^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}$, montrer que f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $||f'||_2^2 \leqslant ||f||_2||f''||_2$.

Exercice 19: ★★ *d.23.017*

Inégalité de Hardy.
Soit $f : [0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue de carré intégrable sur $[0\,,+\infty[$.
Pour $x > 0$, on pose

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que g peut être prolongée par continuité en 0.

2. Soit $A \in]0\,,+\infty[$. Etablir

$$\int_0^A g^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^A f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

3. En déduire que la fonction g^2 est intégrable sur $]0\,,+\infty[$ avec

$$\int_0^{+\infty} g^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

4. Montrer que fg est intégrable sur $]0\,,+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} g^2(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 20: ★★★ *p.03*

Inégalité de Kolmogorov.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et f'' sont de carrés intégrables sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f' est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Etablir

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2\right)^2 \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f''^2\right)$$

Exercice 21: ★★★ *d.23.040*

Soit $f : [0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue telle que $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

II) Calcul d'intégrales

A) Réactivation des techniques de première année

Calculer les intégrales suivantes :

Exercice 22: ★ *t.10.003*

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^3(x)}$
2. $\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \tan(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))(\ln(\ln(t)))}$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^2(x)\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_1^2 \ln^2(x)\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^1 x^4\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$
7. $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{x}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} x\tan^2(x)\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int_1^{64} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$
11. $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2(x))}$
13. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$
14. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(x^n+3)}$
15. $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}$
16. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}.$

Exercice 23: ★★ *t.10.004*

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x+1)\ln x}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x(1+\ln(x)+\ln^2(x))(2+\ln(x))}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{\sqrt{\frac{3}{\pi}}}^{\sqrt{\frac{6}{\pi}}} \frac{\mathrm{d}x}{x^3\cos^2\left(\frac{1}{x^2}\right)}$
4. $\displaystyle\int_1^2 \ln^n x\,\mathrm{d}x$, $n\in\mathbb{N}$ sous forme de $\sum$.
5. $\displaystyle\int_{-1/42}^{1/42} \frac{x(x^2+2)}{(x^2+1)(x^2-1)(2x^4+x^2+1)}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_{-3}^1 \sqrt{3-2x-x^2}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)+3\sin^2(x)}$
10. $\displaystyle\int_4^5 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3-12x-16}}$
11. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int_2^5 \frac{9x}{(x^2-4x+13)^2}\,\mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+1}$
14. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
15. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})\,\mathrm{d}x.$

B) Intégrales impropres

Exercice 24: ★ *d.23.046*

Calculer
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+\frac{1}{t}}$$

Exercice 25: ★ *d.23.047*

Calculer
$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

Exercice 26: ★ *d.23.065*

Soient $\alpha > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$. Calculer

$$C(\alpha,\omega) = \int_0^{\infty} \cos(\omega t)e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \text{ et } S(\alpha,\omega) = \int_0^{\infty} \sin(\omega t)e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 27: ★ *d.23.107*

Etudier l'existence et donner la valeur de

$$\int_0^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

Exercice 28: ★ *d.23.115*

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$I_n = \int_0^{\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

.

Exercice 29: ★★ *d.23.066*

Calculer, pour $a > 0$,

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{a^2 - t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 30: ★★ *d.23.067*

Pour a réel, on pose

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)}$$

1. Pour quelles valeurs de a l'intégrale définissant $I(a)$ existe-t-elle ?
2. En utilisand le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, calculer $I(a)$.

Exercice 31: ★★ *d.23.071*

Pour $a, b > 0$, calculer

$$I(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}$$

Exercice 32: ★★ *d.23.076*

Trouver une expression simple, pour $x, y \in \left]-1\,,1\right[$, de

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{(1-2x\cos t + x^2)(1-2y\cos t+y^2)}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 33: ★★ *b.02.004*

Vérifier l'existence et calculer la valeur des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}}{x}\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{t} - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right)\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 34: ★★ *b.02.017*

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admettant une limite ℓ en $-\infty$ et telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge. Montrer l'existence et calculer pour $a < b$ l'intégrale $\displaystyle I(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t+a) - f(t+b))\,\mathrm{d}t$.

Exercice 35: ★★★ *p.04*

Calculer $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Arctan}^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

III) Exemples et contre-exemples

Exercice 36: ★ *h.11.5*

Trouver une fonction positive et intégrable sur $[0\,,1]$ et d'intégrale nulle, qui n'est pas identiquement nulle sur $[0\,,1]$.

Exercice 37: ★ *h.11.11*

Trouver une fonction localement intégrable, positive et décroissante sur $[1\,,+\infty[$, de limite nulle en $+\infty$, qui n'est pas intégrable sur l'intervalle $[1\,,+\infty[$.

Exercice 38: ★★ *h.11.6*

Trouver une fonction positive et intégrable sur $[0\,,1]$, d'intégrale nulle sur le segment $[0\,,1]$, telle que l'ensemble des points où elle n'est pas nulle est dénombrable et dense dans $[0\,,1]$.

Exercice 39: ★★ *h.11.8*

Trouver deux fonctions intégrables f et g telles que $g \circ f$ ne soit pas intégrable.

Exercice 40: ★★ *h.11.14*

Trouver une fonction positive et intégrable dont le carré n'est pas intégrable.

Exercice 41: ★★ *h.11.17*

Intégrale indéfinie F d'une fonction f dérivable en 0 telle que $F'(0) \neq f(0)$.

Exercice 42: ★★ *h.11.27*

Fonctions de f et g telles que $f(x) = \underset{x \to +\infty}{o}(g(x))$, alors que :

$$\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x \to +\infty}{o}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Exercice 43: ★★ *h.11.28*

Trouver deux fonctions h et g équivalentes au voisinage de $+\infty$ alors que $x \longmapsto \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$ n'est pas équivalente à $x \longmapsto \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 44: ★★ *h.11.29*

Trouver deux fonctions f et g intégrables sur l'intervalle $[1\,,+\infty[$ telles que $f(x) = \underset{x \to +\infty}{o}(g(x))$ alors que

$$\int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x \to +\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Exercice 45: ★★ *h.11.30*

Fonctions h et g intégrables sur $[1\,,+\infty[$ et équivalentes au voisinage de $+\infty$, alors que la fonction $x \longmapsto \int_x^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ n'est pas équivalente à $x \longmapsto \int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 46: ★★★ *h.11.12*

Trouver une fonction intégrable et positive sur $[0\,,+\infty[$ et qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

Exercice 47: ★★★ *h.11.19*

Trouver une fonction dérivable $]-1\,,1[$ dont la fonction dérivée n'est intégrable sur aucun segment $[-a\,,a]$ où a est un réel tel que $0 < a < 1$.

Exercice 48: ★★★ *h.11.25*

Trouver une fonction sur un segment dont le sommes de Riemann n'admettent pas de limite dans $\mathbb{R}$.
Choisir une fonction qui n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Exercice 49: ★★★ *h.11.26*

Trouver une fonction intégrable sur un intervalle autre qu'un segment dont les sommes de Riemann n'admettent pas de limite dans $\mathbb{R}$.

IV) Applications

A) Topologie, équations différentielles

Exercice 50: ★★ *b.02.027*

Soit f une fonction continue et de carré intégrable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto e^{-x} \displaystyle\int_0^x f(t)e^t \,\mathrm{d}t$.

Exercice 51: ★★ *b.02.028*

Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ de carré intégrable et $g : x \mapsto f(x) - 2e^{-x} \displaystyle\int_0^x e^t f(t) \,\mathrm{d}t$. Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty g^2 = \int_0^\infty f^2$.

Exercice 52: ★★ *b.02.029*

Exercice important.

1. Soit E l'espace vectoriel constitué des fonctions continues de R_+ dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable que l'on munit de la norme définie par $||f||_2 = \left(\displaystyle\int_0^\infty f^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
   Pour $f \in E$, on pose $\phi(f) = g$, où $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t$ si $x > 0$ et $g(0) = f(0)$. Montrer que l'on définit ainsi un endormorphisme ϕ de E.
2. Déterminer $\displaystyle\sup_{f \in E \setminus \{0\}} \frac{||\phi(f)||}{||f||}$.

B) Dénombrement de racines

Exercice 53: ★★★ *b.02.020*

Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) \neq 0$ et $r > 0$.

1. Justifier la convergence de l'intégrale $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(\left|P(re^{it})\right|\right) \mathrm{d}t$.
2. Calculer cette intégrale en fonction de $P(0)$ et des racines de P de module strictement inférieur à r.

Exercice 54: ★★★ *b.02.021*

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, avec $\deg(P) \leqslant \deg(Q) - 2$. On suppose que Q n'a pas de racine réelle ; on notera Z l'ensemble de ses racines.

1. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Montrer l'existence et donner la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t-z)^k}$.
2. Montrer l'existence de la limite quand r tend vers l'infini de $\displaystyle\int_{-r}^{r} \frac{\mathrm{d}t}{t-z}$ et en donner la valeur.
3. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{P(t)}{Q(t)} \mathrm{d}t$ converge et que
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{P(t)}{Q(t)} \mathrm{d}t = i\pi \sum_{z\in Z} \varepsilon(z)\alpha(z)$$
avec $\varepsilon(z)$ le signe de la partie imaginaire de z et $\alpha(z)$ le coefficient de $\dfrac{1}{X-z}$ dans la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P}{Q}$.
4. Dans le cas où P et Q sont des polynômes de $\mathbb{R}[X]$, montrer que
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{P(t)}{Q(t)} \mathrm{d}t = 2i\pi \sum_{z\in Z_+} \alpha(z)$$
, où Z_+ est l'ensemble des racines de Q dans le demi-plan supérieur de $\mathbb{C}$.

C) Autres applications

Exercice 55: ★ *b.02.016*

En utilisant les intégrales de Cauchy-Frullani, montrer que les intégrales suivantes convergent et calculer leur valeur :

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1-t}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 56: ★★ *b.02.005*

Exercice important. *Calcul de l'intégrale de Gauss avec les intégrales de Wallis.*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que pour tout $t \geqslant 0$, $e^{-t^2} \leqslant \dfrac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}$.
2. Montrer que pour tout $t \in \left[0\,,\sqrt{n}\right]$, $\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2}$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n} = \sqrt{n}W_{2n-2}$ et $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \sqrt{n}W_{2n+1}$, avec (W_n) les intégrales de Wallis.
4. Après avoir démontré que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, calculer $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.